5. Automorfismi

Definizione 1. *Si dice* **automorfismo** *di un'algebra di Lie L un isomorfismo di L su se stessa.*

E' chiaro che l'insieme di tutti gli automorfismi di L forma un gruppo, che denoteremo con Aut L , rispetto all'usuale prodotto di morfismi.

Se L è un'algebra di Lie su un campo F *di caratteristica zero*, mediante la funzione esponenziale si possono costruire degli automorfismi di L che hanno un ruolo fondamentale nella teoria di Lie.

A tale scopo, conviene richiamare la seguente:

Definizione 2. *Un endomorfismo x di uno spazio vettoriale V si dice* **nilpotente** *se è $x^k = 0$ per qualche $k > 0$.*

Osserviamo in particolare che:

1) *Gli endomorfismi nilpotenti di uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo F, sono precisamente gli endomorfismi che hanno lo zero come unico autovalore di molteplicità n* . (Sia infatti $x^k = 0$ per qualche $k > 0$: allora il polinomio minimo di x è della forma t^i , per qualche i , e poichè ogni autovalore è necessariamente radice del polinomio minimo , segue che l'unico autovalore di x è lo zero . Inversamente , se x ha lo zero come unico autovalore di molteplicità n , per il Teorema di Hamilton-Cayley $x^n = 0$.)

2) *Siano x , y $\in$ End(V) nilpotenti e permutabili fra loro . Allora x $\pm$ y è nilpotente* . (Per la formula binomiale di Newton , se $x^r = 0$ e $y^s = 0$, si ha $(x \pm y)^{r+s} = 0$.)

Ciò posto, si ha la seguente:

Proposizione 1. *Sia L un'algebra di Lie su un campo F di caratteristica zero, e sia δ una derivazione nilpotente di L, i.e. sia $\delta^k = 0$, per qualche $k > 0$. Allora*

$$\exp \delta = 1 + \delta + \delta^2/2! + \cdots + \delta^{k-1}/(k-1)!$$

è un automorfismo di L.

Dim. Per la dimostrazione, serve ricordare che vale, per una qualsiasi derivazione δ in caratteristica zero, l'usuale *formula di Leibniz* :

$$\delta^r[xy] = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i}[\delta^i x\, \delta^{r-i} y] .$$

(La si provi per induzione su r!)

Donde $$(\delta^r/r!)[xy] = \sum_{i=0}^{r} [(\delta^i x/i!)(\delta^{r-i}y/(r-i)!)] = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} [(\delta^i x/i!)(\delta^j y/j!)] .$$

Se dunque $\delta^k = 0$, si ha :

$$\exp \delta([xy]) = \sum_{r\geq 0} \sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} [(\delta^i x/i!)(\delta^j y/j!)] = \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} [(\delta^i x/i!)(\delta^j y/j!)] =$$

$= [\exp \delta(x) \exp \delta(y)]$. Ciò prova che exp δ è un endomorfismo di L. Infine, si osservi che, posto $\exp \delta = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon^k = 0$, e quindi $1 + \varepsilon$ ha come inverso $1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \ldots + (-1)^{k-1}\varepsilon^{k-1}$.

Osservazioni :

1) L'ultima parte della dimostrazione mostra che, *se η è un qualsiasi endomorfismo nilpotente di uno spazio vettoriale V, exp η è invertibile, cioè è un automorfismo di V.*
2) Notiamo inoltre che *se η, θ sono degli endomorfismi nilpotenti di uno spazio vettoriale che commutano fra loro*, valgono le usuali regole di esponenziazione : *$(\exp\eta)(\exp\theta) = \exp(\eta+\theta)$*, e *$(\exp\eta)^{-1} = \exp(-\eta)$*.

Il caso che ci interessa di più è quello in cui δ = ad x, x $\in$ L, è nilpotente, così che exp ad x $\in$ Aut L . Il sottogruppo di Aut L generato da questi automorfismi è denotato con Int L , e i suoi elementi sono detti **automorfismi interni**. Si vede subito che *Int L è un sottogruppo normale di Aut L*. Infatti, per ogni $\phi \in$ Aut L, x $\in$ L, è $\phi(\mathrm{ad}\, x)\phi^{-1} = \mathrm{ad}\, \phi(x)$, donde segue $\phi(\exp \mathrm{ad}\, x)\phi^{-1} = \exp \mathrm{ad}\, \phi(x)$.

La Proposizione 1 trova in particolare applicazione quando si consideri un endomorfismo nilpotente x di uno spazio V, e sia δ = ad x. Vale infatti il seguente:

Teorema 1. *Sia L $\subseteq$ gl(V) un'algebra di Lie lineare su un campo F .*
i) Se x $\in$ L è nilpotente (i.e. $x^k = 0$ per qualche k > 0), *allora anche ad x è nilpotente* (i.e. $(\mathrm{ad}\, x)^m = 0$ per qualche m > 0). *E in tal caso , se F ha caratteristica zero :*
ii) $\exp \mathrm{ad}\, x(y) = (\exp x)\, y\, (\exp x)^{-1}$ per ogni y $\in$ L, (i.e. : applicare l'automorfismo exp adx a y equivale a coniugare y mediante exp x in gl(V)).

Dim.

i) Associamo a x gli elementi di End(End(V)) dati dalle moltiplicazioni a sinistra e a destra per x: $\lambda_x(y) = xy$, $\rho_x(y) = yx$, per ogni y $\in$ End(V). λ_x e ρ_y sono nilpotenti e commutano fra loro. Segue che anche la loro differenza è nilpotente (cfr. l'Oss. 2). Ma $\lambda_x - \rho_x$ = ad x.

ii) exp ad x = $\exp(\lambda_x - \rho_x) = (\exp\lambda_x)(\exp\rho_{-x}) = (\lambda_{\exp x})(\rho_{\exp(-x)})$.

Esempio. Sia L = sl(2,F), car F = 0, e sia (x,y,h) la base standard. Allora $x^2 = 0$, $y^2 = 0$, e quindi exp ad x, exp ad y $\in$ Int L. (In particolare, $(\mathrm{ad}\, x)^3 = (\mathrm{ad}\, y)^3 = 0$.) Applicare, ad es., l'automorfismo interno η = (exp ad x) (exp ad(-y)) (exp ad x), equivale a coniugare mediante la matrice (exp x)(exp((-y))(exp x) = $e_{12} - e_{21}$.

Osservazioni:

1) Sia L $\subseteq$ gl(V), e si denoti con **GL(V)** il **gruppo generale lineare su V**, cioè il gruppo degli endomorfismi invertibili di V. Allora *ogni g $\in$ GL(V) tale che gLg^{-1} = L induce sull'algebra L l'automorfismo* σ_g : x $\to$ gxg^{-1}. E' chiaro infatti che $\sigma_g \in$ GL(L), e inoltre si ha:

$$g[x,y]g^{-1} = g(xy-yx)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) - (gyg^{-1})(gxg^{-1}) = [gxg^{-1},gyg^{-1}]\ ,$$

ovvero σ_g preserva il bracket.

2) La condizione gLg^{-1} = L è ad esempio soddisfatta da ogni g $\in$ GL(V) se L = gl(V) o sl(V), e da ogni g $\in$ GL(V) tale che $M_{\underline{b}}(g)^t A M_{\underline{b}}(g) = A$ se L è un'algebra classica di tipo B_n , C_n o D_n. Per questa via i gruppi lineari e i gruppi classici (simplettici e ortogonali) sono naturalmente associabili a gruppi di automorfismi delle corrispondenti algebre di Lie, generati da automorfismi del tipo descritto nel Teorema 1.
Ci limitiamo qui a descrivere sommariamente il caso del gruppo speciale lineare :
Sia L = sl(V) = sl(n+1,F), e si denoti con **SL(V)** il **gruppo speciale lineare su V**, cioè il gruppo degli automorfismi g $\in$ GL(V) aventi determinante 1. In forza di 1) l'applicazione σ : g $\to$ σ_g definisce un morfismo del gruppo SL(V) in GL(L), il cui nucleo risulta essere il centro Z(SL(V)) di SL(V), cioè il sottogruppo costituito dagli scalari di determinante 1. L'immagine σ(SL(V)) è dunque un gruppo isomorfo a **SL(V)/Z(SL(V)) = PSL(V)** , il **gruppo proiettivo speciale lineare su V**. E' noto che SL(V) è generato dagli

elementi $t_{ij} = I_V + \alpha e_{ij} = \exp(\alpha e_{ij})$, ($i \neq j \in \{1,...,n+1\}$, $\alpha \in F$). Ne segue, in forza del Teorema 1, che $\sigma_{t_{ij}} = \exp \mathrm{ad}(\alpha e_{ij})$, e infine $PSL(V) \approx$
$< \exp \mathrm{ad}(\alpha e_{ij}) >$.

Esercizio . Si denoti con **sc(n,F)** l'insieme delle **matrici scalari** di ordine n a elementi in F. Si provi che sc(n,F) è il centro di gl(n,F). Si provi inoltre che $Z(sl(n,F)) = \underline{0}$ se car F non divide n, mentre $Z(sl(n,F)) = sc(n,F)$ se car F divide n.
(Si noti in particolare che, per ogni $0 \neq x \in sc(n,F)$, ad $x = 0$. Ciò mostra che ad x può ben essere nilpotente senza che lo sia x .)

II. Algebre di Lie nilpotenti e risolubili

1. Algebre nilpotenti

Definizione 1 . *Sia L un'algebra di Lie. La sequenza di ideali $L^0 = L$, $L^1 = [LL]$, $L^2 = [LL^1]$, ... , $L^i = [LL^{i-1}]$, ... si dice* **serie centrale discendente** *di L. L si dice* **nilpotente** *se $L^n = \underline{0}$ per qualche n.*

Esempi:

1) Ogni algebra abeliana è ovviamente nilpotente.

2) L'algebra di Heisenberg, definita in I.2., è nilpotente ($L^2 = \underline{0}$).

2) Sia L = **st(n,F)**, n > 1. L ha base ($e_{ij} \mid i < j$). Diciamo che j - i è il *livello* di e_{ij}. $L^1 = [LL]$ è generata dai brackets $[e_{ij}, e_{kl}]$ con $i < j$, $k < l$. Possiamo anche supporre $i \neq l$, poichè $i = l$ implica $j \neq k$, e $[e_{ij}, e_{kl}] = -[e_{kl}, e_{ij}]$. Allora si ha: $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{li} e_{kj} = e_{il}$ se $j = k$, $= 0$ in caso contrario. Poichè il livello di e_{il} è la somma dei livelli di e_{ij} e e_{kl}, si conclude che L^1 è generata dagli e_{ij} di livello ≥ 2. Allo stesso modo, si vede che $L^2 = [LL^1]$ è generata dagli e_{ij} di livello ≥ 3 , e in generale L^i è generata dagli e_{rs} di livello $\geq i+1$. Si conclude che $L^{n-2} = < e_{1n} >$, e $L^{n-1} = \underline{0}$.

Proposizione 1. *Sia L un'algebra di Lie. Allora :*
i) Se L è nilpotente, sono nilpotenti anche tutte le sottoalgebre e tutte le immagini epimorfe di L.
ii) L è nilpotente sse l'algebra quoziente L/Z(L) è nilpotente.
iii) Se $L \neq \underline{0}$ è nilpotente, $Z(L) \neq \underline{0}$.

Dim.

i) Se K è una sottoalgebra di L , per ogni i $K^i \subseteq L^i$. Sia ora $\phi : L \to M$ un epimorfismo di algebre di Lie. $\phi(L) = M$, e, supposto $\phi(L^{i-1}) = M^{i-1}$, si ha $\phi(L^i) = \phi[LL^{i-1}] = [\phi(L)\phi(L^{i-1})] = [MM^{i-1}] = M^i$ (ovvero, per ogni i, $\phi(L^i) = (\phi(L))^i$). Segue che $L^n = \underline{0}$ implica $M^n = \underline{0}$.
ii) Consideriamo la proiezione canonica $\pi : L \to L/Z(L)$, e supponiamo $\underline{0} = (L/Z(L))^m = (\pi(L))^m = \pi(L^m)$. Allora $L^m \leq Z(L)$, e quindi $L^{m+1} = \underline{0}$.
iii) Sia L^{n-1} l'ultimo termine non nullo nella serie centrale discendente. Allora $[LL^{n-1}] = \underline{0}$, ovvero $L^{n-1} \subseteq Z(L)$.

Osservazione. Per la definizione, un'algebra di Lie L è nilpotente se e solo se esiste un intero n (dipendente solo da L) tale che, per ogni $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$, sia $\mathrm{ad}\, x_1 . \mathrm{ad}\, x_2 . \ldots . \mathrm{ad}\, x_n = 0$. In particolare si ha , per ogni $x \in L$, $(\mathrm{ad}\, x)^n = 0$.

Definizione 2. *Un elemento x di un'algebra di Lie L si dice* **ad-nilpotente** *se* $ad\,x$ $(\in gl(L))$ *è nilpotente.*

Dunque, *se L è un'algebra di Lie nilpotente, ogni elemento di L è ad-nilpotente*. Un classico risultato, il *teorema di Engel* , afferma che vale il viceversa. La dimostrazione si fonda sul seguente :

Teorema A. *Sia* $V \neq \underline{0}$ *uno spazio vettoriale di dimensione finita su un arbitrario campo F, e sia L una sottoalgebra di gl(V), costituita da elementi nilpotenti. Allora V contiene un autovettore comune a tutti gli elementi di L, i.e. esiste* $v \in V, v\neq 0$, *tale che* $Lv = \underline{0}$.

Per la dimostrazione, conviene introdurre la nozione di normalizzante di un sottospazio di un'algebra di Lie :

Definizione 3. *Sia K un sottospazio (in particolare una sottoalgebra) di un'algebra di Lie L. Si dice* **normalizzante** *di K in L l'insieme* $\mathbf{N_L(K)} = \{x \in L \ / \ [xK] \subseteq K\}$. *Se* $N_L(K) = K$, *si dice che K è* **autonormalizzante**.

Si riconosce subito, applicando l'identità di Jacobi, che $N_L(K)$ è una sottoalgebra di L . Se K è una sottoalgebra di L, $N_L(K)$ non è altro che la più grande sottoalgebra di L che contiene K come un suo ideale.

Conviene, per completezza, dare anche la seguente:

Definizione 4. *Sia S un sottoinsieme di un'algebra di Lie L. Si dice* **centralizzante** *di S l'insieme* $\mathbf{C_L(S)} = \{x \in L \ / \ [xS] = \underline{0}\}$.

Per l'identità di Jacobi , $C_L(S)$ è una sottoalgebra di L $(C_L(L) = Z(L))$.

Esercizi :

1) Sia $L = gl(n,F)$. $N_L(t(n,F)) = t(n,F)$, $N_L(d(n,F)) = d(n,F)$, $N_L(st(n,F)) = t(n,F)$.
2) Sia car $F = 0$, $L = A_n, B_n, C_n, D_n$, D = {matrici diagonali in L} . Allora $N_L(D) = D$.

Conviene, prima di passare alla dimostrazione del Teorema A, richiamare alcune semplici nozioni di algebra lineare e fissare alcune notazioni utili nel seguito:

Sia x un endomorfismo di uno spazio vettoriale V definito su un campo F, e sia U un sottospazio x-invariante di V (i.e. $x(U) \subseteq U$). Allora, come è ben noto:
1) x induce su U l'endomorfismo $x_{|U}$ definito dalla restrizione di x a U;
2) x induce sullo spazio quoziente V/U l'endomorfismo $x_{|V/U}$ definito ponendo $x_{|V/U}(U + v) = U + x(v)$.
3) Se V ha dimensione finita su F, $\underline{a} = (u_1, \ldots, u_r)$ è una base di U, e $\underline{b} = (u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ è una base di V, allora la matrice di x rispetto a $\underline{b}$ è :

$$M_{\underline{b}}(x) = \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

ove $A = M_{\underline{a}}(x_{|U})$, e $B = M_{\underline{c}}(x_{|V/U})$ è la matrice di $x_{|V/U}$ rispetto alla base $\underline{c} = (U + v_{r+1}, \ldots, U + v_n)$ di V/U.

Sia ora L una sottoalgebra dell'algebra generale lineare gl(V), costituita da endomorfismi che lasciano il sottospazio U invariante. Allora :
1) l'applicazione $x \to x_{|U}$ definisce un omomorfismo di L in gl(U);
2) l'applicazione $x \to x_{|V/U}$ definisce un omomorfismo di L in gl(V/U).
(Si vede immediatamente che il bracket è preservato.)

Dim. del Teorema A :

Un'applicazione lineare nilpotente ha come unico autovalore lo zero, al quale corrisponde almeno un autovettore in V. Pertanto l'asserto è certamente vero se dim L = 1. Procediamo allora per induzione su dim L.
Sia K una sottoalgebra di L, $K \neq L$. Per il Teorema in I.5, punto i), mediante la rappresentazione aggiunta K opera sullo spazio L, e quindi anche sullo spazio quoziente L/K, come un'algebra costituita da applicazioni lineari nilpotenti. Denotiamo con $ad_{L/K}\, K$ l'immagine di K in gl(L/K). Poiché dim K < dim L, l'ipotesi induttiva assicura che esiste in L/K un elemento $x+K \neq K$ tale che $(ad_{L/K}\, K)(x+K) = K$. Ciò significa che, per ogni $k \in K$, $[kx] \in K$, ovvero che, essendo $x \notin K$, $N_L(K) \supset K$.
Sia ora K massimale in L. Allora necessariamente $N_L(K) = L$, cioè K è un ideale di L. Possiamo perciò considerare l'algebra quoziente L/K, e affermare che dim L/K = 1. Infatti in caso contrario L/K conterrebbe una sottoalgebra propria di dimensione 1, la cui pre-immagine in L sarebbe una sottoalgebra propria di L contenente propriamente K, contro la massimalità di K. Dunque $L = K + < a >$, $a \in L - K$. Poniamo $U = \{ v \in V \mid Kv = \underline{0} \}$: per l'ipotesi induttiva è $U \neq \underline{0}$. Inoltre, essendo K un ideale, per ogni $x \in L$, $k \in K$, $u \in U$ si ha: $k(xu) = (kx)u = (xk-[xk])u = (xk)u-([xk])u = 0$. Dunque U è L-invariante. In particolare $a_{|U}$ è un'applicazione lineare nilpotente, e dunque esiste $v \in U$, $v \neq 0$, tale che $av = 0$. Poichè è anche $Kv = \underline{0}$, segue finalmente $Lv = \underline{0}$.

Corollario 1 (Teorema di Engel). *Un'algebra di Lie L è nilpotente se e solo se ogni suo elemento è ad-nilpotente.*

Dim. Sappiamo che, se L è un'algebra nilpotente, esiste un intero n tale che, per ogni $x \in L$, $(ad\ x)^n = 0$, ovvero ogni elemento di L è ad-nilpotente.
Sia viceversa $L \neq \underline{0}$ costituita da elementi ad-nilpotenti. Allora, per ipotesi, l'algebra ad L soddisfa le condizioni del Teorema A. Dunque in L esiste un elemento $x \neq 0$ tale che $[Lx] = \underline{0}$, ovvero $Z(L) \neq \underline{0}$. L'algebra quoziente L/Z(L) consiste anch'essa di elementi ad-nilpotenti e ha dimensione minore di quella di L. Per induzione su dim L possiamo allora affermare che L/Z(L) è nilpotente. Segue che L è nilpotente.

Corollario 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo F, e sia L una sottoalgebra di Lie dell'algebra gl(V) costituita da elementi nilpotenti. Allora esiste una base di V rispetto alla quale L può essere vista come una sottoalgebra di st(n,F), l'algebra di Lie delle matrici triangolari alte nilpotenti.*

Dim. In forza del Teorema A, esiste $0 \neq v \in V$ tale che $Lv = \underline{0}$. Ovviamente il sottospazio $W = < v >$ è L-invariante, e quindi L agisce sullo spazio V/W come un'algebra di elementi nilpotenti. Per induzione su dim V, esiste in V/W una base $(W+v_2, \ldots, W+v_n)$ rispetto alla quale, per ogni $x \in L$, $M(x_{|\, V/W}) \in st(V/W)$. Allora , posto $v = v_1$, la base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di V soddisfa le condizioni richieste per L.

Osservazione : Se L è una qualsiasi algebra di Lie nilpotente, l'algebra ad $L \subset gl(L)$ soddisfa le condizioni del Corollario 2. In altre parole, l'algebra quoziente L/Z(L) può essere realizzata come un'algebra di matrici strettamente triangolari alte.

Corollario 3. *Sia I un ideale di un'algebra di Lie nilpotente L. Se $I \neq \underline{0}$, $I \cap Z(L) \neq \underline{0}$.*

Dim. Poichè I è un ideale di L, I è ad L-invariante. L'applicazione $ad\ x \rightarrow ad\ x_{|I}$ definisce un omomorfismo f : $ad\ L \rightarrow gl(I)$. Applicando il Teorema A a f(ad L), possiamo affermare che esiste in I un elemento $i \neq 0$ tale che $[L\, i] = \underline{0}$. Perciò $i \in I \cap Z(L)$.

2. Algebre risolubili

Definizione 1. *Sia L un'algebra di Lie. La sequenza di ideali* $L^{(0)} = L$, $L^{(1)} = [LL]$, $L^{(2)} = [L^{(1)}L^{(1)}]$, . . . , $L^{(i)} = [L^{(i-1)}L^{(i-1)}]$, . . . *si dice* **serie derivata** *di L. L si dice* **risolubile** *se* $L^{(n)} = \underline{0}$ *per qualche n.*

Osservazioni:

1) *Ogni algebra di Lie nilpotente è risolubile* (essendo, per ogni i, $L^{(i)} \subseteq L^i$).

2) Non vale il viceversa. E.g.: l'algebra 2-dimensionale non abeliana su un campo F (cfr. I.2.) è risolubile, poichè $L^{(1)} = \langle x \rangle$, e quindi $L^{(2)} = \underline{0}$. D'altra parte, $L^2 = [LL^1] = [L\langle x \rangle] = \langle x \rangle = L^1$, donde $L^i = L^1 \ \forall\ i \geq 1$, e quindi L non è nilpotente.

3)Un'algebra semplice, e più in generale ogni algebra per la quale sia $[LL] = L \neq \underline{0}$, è evidentemente non risolubile.

Esempio: Un notevole esempio di algebra risolubile è dato dall'*algebra* **t(n,F)** *delle matrici triangolari alte di ordine n su un campo F.*
Sia infatti L = t(n,F), K = st(n,F). Sappiamo (cfr. I.2.) che $L^{(1)} = K$. Perciò $L^{(2)} = [KK] = K^1$, $L^{(3)} = K^{(2)}, \ldots$, $L^{(i)} = K^{(i-1)}, \ldots$ Poichè K è nilpotente, e quindi risolubile, si conclude che L è risolubile. (Per una stima precisa, si osservi che $L^{(2)}$ è generata dagli elementi e_{rs} di livello ≥ 2, $L^{(3)}$ dagli e_{rs} di livello $\geq 2^2, \ldots$, $L^{(i)}$ dagli e_{rs} di livello $\geq 2^{i-1}$, sicché $L^{(i)} = \underline{0}$ per $2^{i-1} > n-1$.)
D'altra parte, se n > 1, L = t(n,F) non è nilpotente. Infatti $[LL^1]$ è generata dai brackets $[e_{ij}, e_{kl}]$ con $i \leq j$, $k < l$. Se j = k, questi danno tutti gli e_{il} con $i < l$. Pertanto $L^2 = [LL^1] = L^1$, e quindi $L^i = L^1$ per ogni i.

Proposizione 1. *Sia L un'algebra di Lie . Allora:*
i) Se L è risolubile, sono risolubili anche tutte le sottoalgebre e tutte le immagini epimorfe di L.
ii) Sia I un ideale di L. Se I e L/I sono risolubili, anche L è risolubile.
iii) Se I e J sono ideali risolubili di L, la somma I + J è risolubile.

Dim.

i) Se K è una sottoalgebra di L, $K^{(i)} \subseteq L^{(i)}$ per ogni i.
Se $\phi : L \rightarrow M$ è un epimorfismo di algebre di Lie, per ogni i è $\phi(L^{(i)}) = M^{(i)}$ (induzione su i).
ii) Sia $\pi : L \rightarrow L/I$ l'epimorfismo canonico, e si supponga $(L/I)^{(m)} = \underline{0}$. Allora $\pi(L^{(m)}) = (\pi(L))^{(m)} = (L/I)^{(m)} = \underline{0}$, ovvero $L^{(m)} \subseteq I$. Si supponga ora $I^{(n)} = \underline{0}$. Per il punto i), $(L^{(m)})^{(n)} = \underline{0}$. Poichè, per ogni i,j è chiaramente $(L^{(i)})^{(j)} = L^{(i+j)}$, si conclude che $L^{(m+n)} = \underline{0}$.
iii) Per il punto i), $I/(I \cap J)$ è risolubile. D'altra parte $I/(I \cap J)$ è isomorfa a $(I + J)/J$, che è dunque anch'essa risolubile. Per il punto ii) si conclude che I + J è risolubile.

Lemma. *In un'algebra di Lie L vi è un unico ideale risolubile massimale (che contiene ogni ideale risolubile di L).*

Dim. Se L è risolubile non vi è nulla da dimostrare. Si supponga dunque L non-risolubile, e sia R un ideale risolubile massimale di L. Se I è un qualsiasi ideale risolubile di L, per il precedente punto iii) la somma R + I è un ideale risolubile di L. La massimalità di R implica allora R + I = R, cioè $R \supseteq I$. Si conclude che R è l'unico ideale risolubile massimale di L.

Definizione 2. *L'unico ideale risolubile massimale di un'algebra di Lie L si dice* **radicale** *di L , e si denota con* **Rad L**.

Definizione 3. *Sia $L \neq \underline{0}$ un'algebra di Lie . L si dice* **semisemplice** *se Rad L = $\underline{0}$.*

Osservazioni :

1) *Ogni algebra di Lie semplice è semisemplice.* ($L \neq \underline{0}$ non è risolubile, ed è priva di ideali propri. Dunque Rad $L = \underline{0}$.)

2) Ovviamente, un'algebra di Lie L è risolubile sse Rad L = L . *Se L è un'algebra non risolubile, l'algebra quoziente L/Rad L è semisemplice.*
(Sia I/Rad $L \neq \underline{0}$ un ideale risolubile di L/Rad L. Allora per il punto ii) della Proposizione precedente, $I \supset$ Rad L è risolubile, contraddizione.)

Siano $L_1, L_2, \ldots, L_r$ algebre di Lie su un campo F, e sia $L = \dot{\sum_i} L_i$ la somma diretta (esterna) degli spazi L_i ($i = 1, \ldots, r$). Definendo, per ogni $(x_1, \ldots, x_r), (y_1, \ldots, y_r) \in L$,

$$[(x_1, \ldots, x_r)(y_1, \ldots, y_r)] = ([x_1y_1], \ldots, [x_ry_r])$$

si dà a L la struttura di algebra di Lie.

Definizione 4. *Diremo che* $L = \dot{\sum_i} L_i$ *, con il bracket sopra definito, è l'algebra di Lie* **somma diretta** *delle algebre* L_i.

Notiamo che, per ogni i, L_i è isomorfa a $L_i^* = \{(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \mid x_i \in L_i\}$. L_i^* (e ogni suo ideale) è un ideale di L, e $L = L_1^* \oplus \cdots \oplus L_r^*$ (somma diretta di sottospazi).
Inversamente, se L è un'algebra di Lie che contiene degli ideali $I_1, \ldots, I_r$ tali che $L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ (somma diretta di sottospazi), allora, se $i \neq j$, $[I_i I_j] \subseteq I_i \cap I_j = \underline{0}$. Ne segue che $[\Sigma x_i \Sigma y_i] = \Sigma [x_i y_i]$, e l'applicazione $\Sigma x_i \rightarrow (x_1, \ldots, x_r)$

realizza un isomorfismo fra l'algebra L e l'algebra somma diretta $\dot{\sum_i} I_i$. Diremo allora che l'algebra L è **somma diretta di ideali.** (Si osservi ancora che, per ogni i, ogni ideale di I_i è anche un ideale di L.)

Proposizione 2. *Sia L un'algebra di Lie,* $L = \dot{\sum_i} L_i$ $(L_i \neq \underline{0})$. *L è semisemplice se e solo se sono semisemplici le algebre* L_i.

Dim. Sia $J \neq \underline{0}$ un ideale risolubile di L. Per ogni i, sia π_i la proiezione di L su L_i (i.e. l'epimorfismo $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_r) \rightarrow x_i \in L_i$). Allora $\pi_i(J)$ è un ideale risolubile di L_i, e per qualche i $\pi_i(J) \neq \underline{0}$. Inversamente, se $\underline{0} \neq J_i$ è un ideale risolubile di L_i (per qualche i), $J_i^* = \{(0, \ldots, 0, j_i, 0, \ldots, 0) \mid j_i \in J_i\}\}$ è un ideale risolubile di L.

Corollario. *La somma diretta di un numero finito di algebre semplici è un'algebra semisemplice.*

3. Il Teorema di Lie

Un risultato analogo al Teorema A del paragrafo 2. può essere provato per le algebre lineari risolubili, e con una dimostrazione sostanzialmente analoga, purché si assuma che il campo F sia *algebricamente chiuso di caratteristica zero.*

Teorema B. *Sia* $V \neq \underline{0}$ *uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo F algebricamente chiuso di caratteristica zero, e sia L una sottoalgebra risolubile di gl(V). Allora V contiene un autovettore comune a tutti gli elementi di L.*

Dim. Se dim L = 0 o dim L = 1 il risultato è immediato. Procediamo allora per induzione su dim L.

Possiamo supporre dim $L > 1$, e considerare l'algebra $L/[LL]$. Poichè L è risolubile, dim $L/[LL] > 0$. Inoltre $L/[LL]$ è un'algebra abeliana, e quindi ogni suo sottospazio è anche un ideale. Ne segue che la pre-immagine in L di un sottospazio di codimensione 1 di $L/[LL]$ è un ideale di codimensione 1 in L. Sia K un tale ideale, e sia $L = K + < z >$, $z \in L - K$.
Per induzione, esiste in V un autovettore comune a tutti gli elementi di K. Sia v un tale autovettore: allora per ogni $k \in K$ $kv = \lambda(k)v$, ove $\lambda \in K^*$, e il sottospazio $U = \{u \in V \mid ku = \lambda(k)u,\ \forall\ k \in K\}$ è diverso da $\underline{0}$. Dimostriamo che U è L-invariante, cioè che, fissati comunque $x \in L$, $u \in U$, si ha $k(xu) = \lambda(k)(xu)$ per ogni $k \in K$. Poichè $k(xu) = (kx)u = (xk)u - [x,k]u = \lambda(k)(xu) - \lambda([x,k])u$, basta provare che $\lambda([x,k]) = 0$. A tale scopo, supponiamo sia r il minimo intero positivo tale che i vettori u, xu, ..., $x^r u$ siano dipendenti. Per ogni $i \geq 0$, denotiamo con U_i il sottospazio generato da u, xu, ..., $x^{i-1}u$ (avendo posto $U_0 = \underline{0}$). Evidentemente dim $U_r = r$, e $U_{r+j} = U_r$ per ogni $j \geq 0$. Inoltre $x(U_i) \subseteq U_{i+1}$ (e in particolare $x(U_r) \subseteq U_r$). Vogliamo provare che il sottospazio U_r è K-invariante, e che, rispetto alla base $(u, xu, \ldots, x^{r-1}u)$, per ogni $k \in K$ $k_{\mid U_r}$ è rappresentato da una matrice triangolare alta con tutti gli elementi diagonali uguali a $\lambda(k)$. A tale scopo, proviamo che, per ogni $j \geq 0$, è : $k(x^j u) \equiv \lambda(k)(x^j u) \bmod U_j$. Procediamo per induzione su j, osservando che l'asserto è vero per $j = 0$, essendo $ku = \lambda(k)u$. Dopo di ciò, fatta l'ipotesi induttiva che, per ogni $k \in K$, sia $kx^{j-1}(u) = \lambda(k)x^{j-1}(u) + u_{j-1}$ (con $u_{j-1} \in U_{j-1}$), si ha: $kx^j u = kx(x^{j-1}u) = (xk)(x^{j-1}u) - [x,k]x^{j-1}u = \lambda(k)x^j(u) + xu_{j-1} - [x,k]x^{j-1}(u)$. Poiché $xu_{j-1} \in U_j$ (per come è definito U_j) e, per la stessa ipotesi induttiva applicata a $[x,k] \in K$, $[x,k]x^{j-1}(u) \in U_j$, si ottiene ciò che si voleva. In particolare, $Tr(k_{\mid U_r}) = r{\cdot}\lambda(k)$. E dal momento che ciò vale per ogni elemento di K, vale in particolare per $[x,k]_{\mid U_r} = [x_{\mid U_r}, k_{\mid U_r}]$. Poichè il commutatore di due endomorfismi di U_r ha traccia nulla, deve essere $r{\cdot}\lambda([x,k]) = 0$, da cui segue, essendo car $F = 0$, $\lambda([x,k]) = 0$.
Torniamo ora a considerare $L = K + < z >$, $z \in L - K$. Poichè U è $< z >$-invariante, e F è un campo algebricamente chiuso, esiste certamente in U un autovettore w per z, corrispondente a un certo autovalore μ. Possiamo allora estendere la forma lineare λ a L, ponendo $\lambda(z) = \mu$, così che $x(w) = \lambda(x)w$ per ogni $x \in L$, e w è un autovettore comune a tutti gli elementi di L.

Corollario 1 (Teorema di Lie). *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo F algebricamente chiuso di caratteristica zero, e sia L una sottoalgebra risolubile di gl(V). Allora esiste in V una base rispetto alla quale L può essere vista come una sottoalgebra di t(n,F), l'algebra di Lie delle matrici triangolari alte.*

Dim. Per il Teorema B, esiste in V un autovettore w comune a tutti gli elementi di L. Posto $W = < w >$, L opera su V/W come un'algebra risolubile, e per induzione su dim V (essendo l'asserto ovvio se dim $V = 1$) esiste in V/W una base $(W+v_2, \ldots, W+v_n)$ rispetto alla quale, per ogni $x \in L$, la matrice di $x_{\mid V/W}$ è triangolare alta. Allora, posto $w = v_1$, la base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di V soddisfa le condizioni richieste.

Osservazione: Un modo alternativo di enunciare il Corollario 1 è il seguente: *esiste in V una catena ascendente di sottospazi :* $\underline{0} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$, *ove ogni* V_i *è L-invariante e dim* $V_i = i$. (Si prenda come V_i il sottospazio $< v_1, v_2, \ldots, v_i >$)

Sempre nell'ipotesi che il campo base F sia *algebricamente chiuso e di caratteristica zero* , valgono i seguenti :

Corollario 2. *Ogni algebra di Lie risolubile L possiede una catena ascendente di ideali :* $\underline{0} = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = L$ *, ove dim* $L_i = i$ *per ogni i.*

Dim. Si consideri l'algebra ad L. E' una sottoalgebra risolubile di gl(L), per la quale vale il Teorema di Lie e l'Osservazione che lo segue. Ma i sottospazi ad L-invarianti di L sono precisamente gli ideali di L.

Corollario 3. *Sia L un'algebra di Lie risolubile. Allora ogni* $x \in [LL]$ *è ad-nilpotente. In particolare [LL] è nilpotente.*

Dim. Si consideri una catena ascendente di ideali di L del tipo descritto nel Corollario 2, e una base $(v_1, \ldots, v_n)$ di L tale che $< v_1, \ldots, v_i > = L_i$. Rispetto a una base cosiffatta, per ogni $x \in L$ la matrice rappresentativa di

ad x è triangolare alta. D'altra parte, per ogni $y,z \in L$, ad $[yz]$ = [ad y, ad z] , e $[t(n,F),t(n,F)] = st(n,F)$. Si conclude che ad x è nilpotente per ogni $x \in [LL]$. A maggior ragione ad $x|_{[LL]}$ è nilpotente, e quindi [LL] è nilpotente in forza del Teorema di Engel.

Corollario 4. *Sia $\phi : L \rightarrow gl(V)$ una rappresentazione di un'algebra risolubile L su uno spazio V di dimensione finita. Se nessun sottospazio proprio di V è $\phi(L)$-invariante, dim V = 1.* (In altre parole, ogni rappresentazione *irriducibile* finito-dimensionale di un'algebra risolubile L ha dimensione 1.)

Dim. $\phi(L)$ è una sottoalgebra risolubile di gl(V). Per il Teorema B, esiste in V un autovettore v comune a tutti gli elementi di $\phi(L)$. Poichè il sottospazio generato da v è ovviamente $\phi(L)$-invariante, si conclude che dim V = 1.

Osservazione : Notiamo che nella dimostrazione del Teorema B , si richiede che il campo F, oltre ad essere di caratteristica zero, contenga gli autovalori degli elementi di L (ciò che certamente accade se F è algebricamente chiuso). Un'algebra di Lie lineare con tale proprietà si dice *split*. Pertanto il Teorema B e tutte le sue conseguenze valgono , più generalmente, per tutte le algebre risolubili split.